

## 工業数学

**概要:** 我々の周りの多くの物理現象は、共通した簡単な数式で記述することができる。技術者として社会で活躍するためには、それらの物理現象をよく理解しなければならない。工学分野では、周期関数や微分方程式を使って記述される物理現象が数多く存在している。本講義では、それらの物理現象を理解するための共通の数学的な道具として、フーリエ級数展開、フーリエ変換、ラプラス変換の概念やそれらの性質について理解を深めて詳しく学習する。

**到達目標:** フーリエ級数展開、フーリエ・ラプラス変換の概念やそれらの性質を理解して、説明できる。(知識・理解)  
フーリエ級数展開、フーリエ変換、ラプラス変換を使って、線形微分方程式を解くことができる。(知識・理解)

本講義の利用参考書:

- ・工科系数学セミナー「フーリエ解析と偏微分方程式」、数学教育研究会編、東京電機大学出版局、ISBN-13: 978-4-501-62020-2
- ・理工系の数学入門コース6「フーリエ解析」、大石進一著、岩波書店、ISBN-13: 978-4000077767
- ・「ラプラス変換入門」、水本久夫著、森北出版、ISBN-13: 978-4627071001

## 授業計画

- 第1回 周期関数と実フーリエ級数展開 (スタートアップ授業)
- 第2回 実フーリエ級数展開の性質
- 第3回 実フーリエ級数展開の例題
- 第4回 任意周期の実フーリエ級数展開
- 第5回 複素フーリエ級数展開
- 第6回 周期関数の合成積 ("循環"畳み込み)
- 第7回 フーリエ級数展開を使った線形微分方程式の解法
- 第8回 直交関数系と一般化フーリエ級数
- 第9回 フーリエ変換
- 第10回 フーリエ変換の例題とインパルス応答
- 第11回 ラプラス変換
- 第12回 逆ラプラス変換の解法
- 第13回 ラプラス変換を使った線形微分方程式の解法1
- 第14回 ラプラス変換を使った線形微分方程式の解法2
- 第15回 ラプラス変換のインパルス応答

## 注意事項:

講義には**毎回出席**すること。出席者は講義室入口にある出欠調査のカードリーダーに学生証を当てること。

講義資料をMoodleと下記のWEBページに掲載するので、毎回講義前にその**講義資料を使って予習**すること。予習もせず、講義資料も持たずに、ただ講義室に座っているだけでは、講義内容は理解できない。

また、講義後にMoodleに復習のための課題を毎回出すので、その**課題をやる**こと。これも**成績に反映**される。

<https://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/~tsuzuki/>

## フーリエ変換、フーリエ級数展開:

- ・ 時間の関数  $f(t)$  と、周波数の関数  $F(\omega)$  もしくは周波数成分  $c_n$  の間の変換を行う。
- ・  $-\infty < t < \infty$  の区間が扱える。
- ・ 周波数フィルター、ノイズ除去、画像処理等で使われる。

## ラプラス変換:

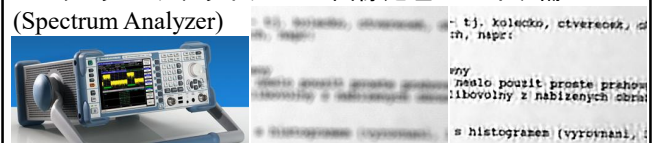
- ・ 基本的にはフーリエ変換と同じことができる。
- ・  $0 \leq t$  の区間が扱える。
- ・ フーリエ変換よりも適用制限が緩いので、フーリエ変換できない様な関数もラプラス変換できる。
- ・ 線形微分方程式が容易に解ける。

## フーリエ変換の応用例1:

スペクトラム・アナライザ  
(Spectrum Analyzer)



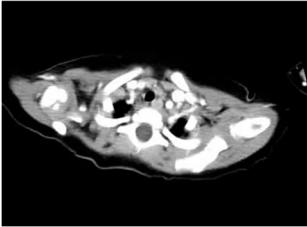
画像処理: ピンボケ補正



モアレ除去



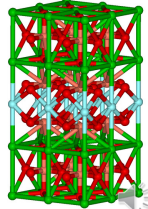
フーリエ変換の応用例2:  
コンピュータ断層撮影:  
(Computed Tomography: CT)



X線結晶構造解析:



高温超電導体  
( $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ )  
の結晶構造



(余談) ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ  
男爵 (Jean Baptiste Joseph Fourier,  
1768年~1830年)



- ・フランスの数学者、物理学者、政治家。
- ・フランスのオセールで仕立屋の9番目の息子として出生。
- ・士官学校卒業後に軍人になれず、修道僧を経て21歳で数学教師になる。
- ・20代でエコール・ポリテクニクの解析数学の教授。
- ・30歳でナポレオンのエジプト遠征に従軍(文化使節団)。
- ・フランス帰国後、34歳でイゼール県(Isère)知事。
- ・40歳で男爵になる。
- ・熱伝導方程式を解くためにフーリエ級数の研究を行う。  
(『熱の解析的理論』1822年54歳)

**周期関数(Periodic function):**

一般にある関数  $f(t)$  が、

$$f(t) = f(t + nT), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

を満たす時、 $f(t)$  を周期関数という。また、“最小”の  $T$  を  $f(t)$  の基本周期という。

代表的な周期関数は、三角関数(trigonometric function)である。  
 $\cos(t) = \cos(t + 2n\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\sin(t) = \sin(t + 2n\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(三角関数の基本周期は、 $T = 2\pi$ である。)

フーリエ級数展開・フーリエ変換では、三角関数が非常に重要な役割を果たす。

(補足) 基本周期  $T$  の自然数倍 ( $2T, 3T$  等) も、関数  $f(t)$  の周期であるが、基本周期は“最小”の  $T$  だけである。また、「基本周期」のことを単に「周期」と呼ぶこともある。

同一のある周期  $T$  を持つ周期関数  $f(t), g(t)$  の線形結合や積も、また周期関数となる。つまり、

$$f(t) = f(t+T), \quad g(t) = g(t+T),$$

が成り立つ時、 $a, b$  を任意の定数として関数  $h$  を

$$h(t) \equiv a f(t) + b g(t),$$

の様に  $f$  と  $g$  の線形結合として定義すると、

$$h(t+T) = a f(t+T) + b g(t+T) = a f(t) + b g(t) = h(t),$$

が成り立ち、関数  $h$  も周期関数となる。同様に、関数  $k$  を、

$$k(t) \equiv f(t) \cdot g(t),$$

の様に  $f$  と  $g$  の積として定義すると、

$$k(t+T) = f(t+T) \cdot g(t+T) = f(t) \cdot g(t) = k(t),$$

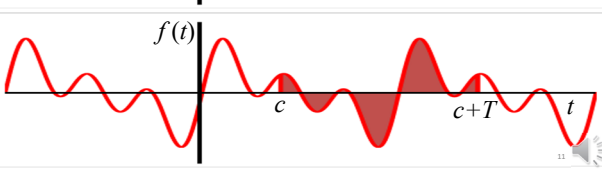
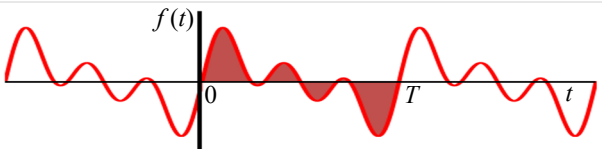
が成り立ち、関数  $k$  も周期関数となる。

(注意) 関数の積の場合は基本周期が短くなることもある。例えば、 $\sin(t)$  の基本周期は  $2\pi$  だが、 $\sin^2(t)$  の基本周期は  $\pi$  になる。

基本周期  $T$  の周期関数  $f(t)$  を“1周期分”だけ定積分した値は、積分範囲を任意にシフトしても変わらない。つまり任意の定数  $c$  に対して、

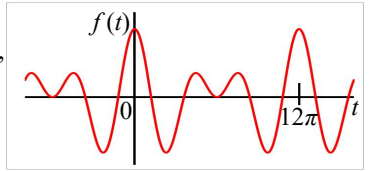
$$\int_0^T f(t) dt = \int_c^{c+T} f(t) dt,$$

が成り立つ。



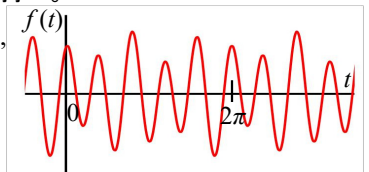
例題1.1

1.  $f(t) = \cos \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{3}$ ,  
の基本周期  $T$  を求めよ。



(解答) 第1項が  $4\pi$ 、第2項が  $6\pi$  の基本周期を持つので、 $f(t)$  は4と6の最小公倍数である  $12\pi$  の基本周期を持つ。

2.  $f(t) = \sin 3t + 3 \cos 5t$ ,  
の基本周期  $T$  を求めよ。

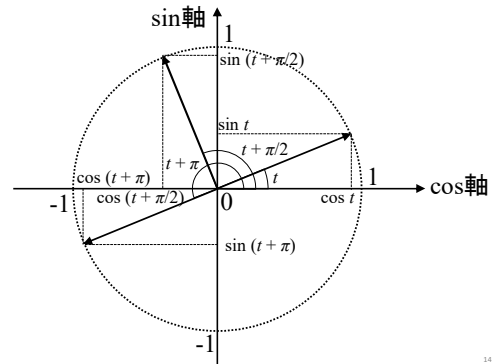


(解答) 第1項が  $2\pi/3$ 、第2項が  $2\pi/5$  の周期を持つので、 $f(t)$  はその最小公倍数である  $2\pi$  の基本周期を持つ。(例題終わり)

**三角関数の性質の復習:** ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )  
 周期性:  $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$ ,  $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$ ,  
 偶・奇性:  $\cos(-t) = \cos(t)$ ,  $\sin(-t) = -\sin(t)$ ,  
 変換:  $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ ,  $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ ,  
 $\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$ ,  $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$ ,  
 $\sin(n\pi) = 0$ ,  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,  
 微分:  $\frac{d \cos(nt)}{dt} = -n \sin(nt)$ ,  $\frac{d \sin(nt)}{dt} = n \cos(nt)$ ,  
 積分:  $\int \cos(nt) dt = \frac{\sin(nt)}{n}$ ,  $\int \sin(nt) dt = -\frac{\cos(nt)}{n}$ ,  
 加法定理:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ,  
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ,  
 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

和・積の変換:  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ ,  
 $2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ ,  
 $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ,

単位円



**部分積分の復習:**  
 任意の関数  $f(t)$  と  $g(t)$  の積の微分は、  

$$\frac{d\{f(t)g(t)\}}{dt} = \frac{df(t)}{dt} g(t) + f(t) \frac{dg(t)}{dt}$$
,  
 となる。この両辺を  $a$  から  $b$  まで定積分すると、  

$$\int_a^b \frac{d\{f(t)g(t)\}}{dt} \cdot dt = \int_a^b \frac{df(t)}{dt} g(t) \cdot dt + \int_a^b f(t) \frac{dg(t)}{dt} \cdot dt$$
  

$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b \frac{df(t)}{dt} g(t) \cdot dt + \int_a^b f(t) \frac{dg(t)}{dt} \cdot dt$$
  

$$\int_a^b \frac{df(t)}{dt} g(t) \cdot dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) \frac{dg(t)}{dt} \cdot dt$$
,  
 となり、部分積分の公式が得られる。

例題1.2 次の定積分値を求めよ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(解答)  $n=0$  のときは、 $\sin 0=0$  なので、定積分値も0となる。  
 $n \neq 0$  の時は、部分積分をすると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \cdot dt &= \left[ -\frac{t \cos nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left( -\frac{\cos nt}{n} \right) \cdot dt \\ &= -\frac{\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos(-n\pi)}{n} - \left[ -\frac{\sin nt}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2} \\ &= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

となり解答が得られる。

例題1.3 以下の2つの定積分値を求めよ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt \cdot dt, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(解答) 1番目の積分を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt &= [e^t \cos nt]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} n e^t \sin nt \cdot dt \\ &= (e^{\pi} \cos n\pi - e^{-\pi} \cos(-n\pi)) + n \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt \cdot dt \\ &= (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) + n \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt \cdot dt, \quad (a式) \end{aligned}$$

となる。次に2番目の積分を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt \cdot dt &= [e^t \sin nt]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} n e^t \cos nt \cdot dt = \sin n\pi \\ &\quad \times (e^{\pi} + e^{-\pi}) - \int_{-\pi}^{\pi} n e^t \cos nt \cdot dt = -n \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt, \quad (b式) \end{aligned}$$

となる。b式をa式の右辺第2項に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt &= (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt, \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{1 + n^2}, \end{aligned}$$

となり、1番目の積分値が求まる。

また、この結果を、b式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt \cdot dt &= -n \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt \cdot dt, \\ &= \frac{(-1)^{n+1} n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{1 + n^2}, \end{aligned}$$

となり、2番目の積分値も求まる。

(別解) 1番目の積分をオイラーの定理(後述)を使って式変形すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} \cos nt \cdot dt &= (1/2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} (e^{int} + e^{-int}) \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{(1+in)t} + e^{(1-in)t}) \cdot dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(1+in)t}}{1+in} + \frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{1+in} + \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\pi} (e^{i\pi})^n - e^{-\pi} (e^{-i\pi})^n}{1+in} + \frac{e^{\pi} (e^{-i\pi})^n - e^{-\pi} (e^{i\pi})^n}{1-in} \right) \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2} \left( \frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in} \right) = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{1+n^2} \end{aligned}$$

となり、解答が得られる。2番目の積分も同様に解ける。

### 実フーリエ級数:

- ある実数の周期関数  $f(t)$  を  $\cos$  と  $\sin$  を使って級数に展開したものが、実フーリエ級数である。
- 実フーリエ級数は、1個の定数項と多数の(一般には無限個の)余弦項( $\cos$ 項)と正弦項( $\sin$ 項)からなる級数である。
- フーリエ級数の数学理論は難解なので、本講義では扱わない。本講義で扱うのは、フーリエ級数の使い方だけであり、それは簡単である。
- 工学分野で実用的かつ重要であるほとんどの周期関数は、実フーリエ級数に展開して解析することができる。

### 実フーリエ級数展開:

基本周期  $T=2\pi$  の周期関数、

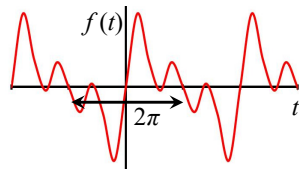
$$f(t) = f(t + 2n\pi),$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

は展開係数  $a_0, a_n, b_n$  を用いて、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2 \cdot t) \dots + a_n \cos(n \cdot t) \dots \\ &\quad + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2 \cdot t) \dots + b_n \sin(n \cdot t) \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad (1.1) \end{aligned}$$

と実フーリエ級数展開することが出来る。(1.1)式の右辺第1項を定数項、第2項を余弦項、第3項を正弦項という。定数項は1個しかないが、余弦項と正弦項は一般に無限個ある。



今回の予告: 基本周期  $T=2\pi$  の周期関数  $f(t)$  を実フーリエ級数展開すると(1.1)式で表され、その展開係数  $a_0, a_n, b_n$  は、(1.2)~(1.4)式を計算して求めることが出来る。

### 重要

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad (1.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad (1.4)$$