注意事項:

講義には**毎回出席**すること。出席者は講義室入口にある出欠調査のカードリーダーに学生証を当てること。

講義資料をMoodleと下記のWEBページに掲載するので、毎回講義前にその**講義資料を使って予習をすること**。予習もせず、講義資料も持たずに、ただ講義室に座っているだけでは、講義内容は理解できない。

また、講義後にMoodleに復習のための課題を毎回出すので、その**課題をやること**。これも**成績に反映される。**

https://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/~tsuzuki/

前回の復習: 周期関数(Periodic function):

一般にある関数 $f(t)$ が、

$$f(t) = f(t+nT), \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

を満たす時、$f(t)$ を周期関数という。また、"最小"の T を $f(t)$ の基本周期という。

代表的な周期関数は、三角関数(trigonometric function)である。

$$\cos(t) = \cos(t+2n\pi), \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\sin(t) = \sin(t+2n\pi), \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

(基本周期は、T=2πである。)

フーリエ級数展開・フーリエ変換では、三角関数が非常に重要な役割を果たす。

同一のある周期 T を持つ周期関数 $f(t)$, $g(t)$ の線形結合や積も、また周期関数となる。また、基本周期 T の周期関数 $f(t)$ を"**1周期分**"定積分した値は、積分範囲を任意にシフトしても変わらない。

前回の復習: 実フーリエ級数:

- ある実数の周期関数 $f(t)$ をcosとsinを使って級数に展開したものが、実フーリエ級数である。
- 実フーリエ級数は、1個の定数項と多数の(一般には無限個の)余弦項(cos項)と正弦項(sin項)からなる級数である。
- フーリエ級数の数学理論は難解なので、本講義では扱わない。本講義で扱うのは、フーリエ級数の使い方だけであり、それは簡単である。
- 工学分野で実用的かつ重要であるほとんどの周期関数は、実フーリエ級数に展開して解析することができる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \qquad (1.1)$$

実フーリエ級数展開の定数項の展開係数a_0の求め方:

(1.1)式の両辺を $-\pi$ から π の範囲で1周期分定積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \right\} dt$$

となる。ここで、上式の右辺が項別積分(積分と和の交換)が出来ると仮定すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt$$

$$= \left[\frac{a_0}{2} t\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{-\cos n\pi + \cos(-n\pi)}{n}$$

$$= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2\sin n\pi}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cos n\pi - \cos n\pi}{n} = a_0\pi,$$

となる。従って、展開係数 a_0 は、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad (1.2)$$

と求まる。

余弦項の展開係数a_n (n=1,2,3…)の求め方:

今度は、(1.1)式の両辺にcos(mt), (m=1,2,3…)を掛けて、$-\pi$ から π の範囲で1周期分だけ定積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mt\, dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\, dt$$

$$= \frac{a_0}{2} [(\sin mt)/m]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\} dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(n+m)t + \sin(n-m)t\} dt$$

となる(途中で和・積の変換をした)。上式の右辺の第1項は、

$$\frac{a_0}{2}\left[\frac{\sin mt}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} = a_0\frac{\sin m\pi - \sin(-m\pi)}{2m} = a_0\frac{\sin m\pi}{m} = 0,$$

となる。また、右辺の第2項は、$n=m$の項とそれ以外($n\neq m$)の項を分けて計算すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{a_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos 2mt+\cos 0\}dt$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{a_m}{2}\left[\frac{\sin 2mt}{2m}+t\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\frac{\sin(n+m)t}{n+m}+\frac{\sin(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_m}{2}[t]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_m\pi,$$

となる。最後に、右辺の第3項も、同様に$n=m$の項とそれ以外($n\neq m$)の項を分けて計算すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t+\sin(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{b_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin 2mt+\sin 0\}dt$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t+\sin(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{b_m}{2}\left[\frac{-\cos 2mt}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left[\frac{-\cos(n+m)t}{n+m}-\frac{\cos(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(b_m/4m)\{-\cos 2m\pi+\cos(-2m\pi)\}$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left\{\frac{-\cos(n+m)\pi+\cos\{-(n+m)\pi\}}{n+m}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(n-m)\pi-\cos\{-(n-m)\pi\}}{n-m}\right\}=0,$$

となる。従って、右辺で零でないのは第2項だけなので、

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt = a_m\pi,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt\,,(1.3)$$

となり余弦項の展開係数a_mが求まる。

正弦項の展開係数b_n (n=1,2,3…)の求め方:

今度は、(1.1)式の両辺にsin(mt), (m=1,2,3…)を掛けて、$-\pi$からπの範囲で1周期分だけ定積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mt\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin mt\,dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\sin mt\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\sin mt\,dt$$

$$=\frac{a_0}{2}[(-\cos mt)/m]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t-\sin(n-m)t\}dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{-\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

となる(途中で和・積の変換をした)。上式の右辺の第1項は、

$$\frac{a_0}{2}\left[\frac{-\cos mt}{m}\right]_{-\pi}^{\pi}=a_0\frac{-\cos m\pi+\cos(-m\pi)}{2m}=0,$$

となる。また、右辺の第2項は、先程と同様に$n=m$の項とそれ以外($n\neq m$)の項を分けて計算すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t+\sin(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{a_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin 2mt+\sin 0\}dt$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t-\sin(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{a_m}{2}\left[\frac{-\cos 2mt}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\frac{-\cos(n+m)t}{n+m}-\frac{\cos(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0,$$

となる。しかし、最後の第3項は、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{-\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{b_m}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{-\cos 2mt+\cos 0\}dt$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{-\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

$$=\frac{b_m}{2}\left[\frac{-\sin 2mt}{2m}+t\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left[\frac{-\sin(n+m)t}{n+m}+\frac{\sin(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{b_m}{2}[t]_{-\pi}^{\pi}$$

$= b_m\pi,$

となる。従って、右辺で零でないのは第3項だけなので、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt = b_m\pi,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt\,,\ (1.4)$$

となり正弦項の展開係数b_mが求まる。

以上を、まとめると、基本周期$T=2\pi$の周期関数$f(t)$を実フーリエ級数展開したものは(1.1)式で表され、その展開係数a_0, a_n, b_nは、(1.2)~(1.4)式を計算して求めることが出来る。

重要

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)\,,\quad (1.1)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\,,\quad (1.2)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,,\quad (1.3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\,,\quad (1.4)$$

三角関数の直交性:

実フーリエ級数展開の展開係数を求める過程で、以下の5つの関係式(2.1)~(2.5)が得られた。($n,m=1,2,3,4,5,\ldots$)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt=\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin n\pi-\sin(-n\pi)}{n}=0,\quad (2.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)dt=\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{-\cos n\pi+\cos(-n\pi)}{n}=0,\ (2.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(n+m)t+\cos(n-m)t\}dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(n+m)t}{n+m}+\dfrac{\sin(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 & (n\neq m)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2mt+\cos 0)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dt=\pi & (n=m)\end{cases},\quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)dt=\frac{-1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(n+m)t-\cos(n-m)t\}dt$$

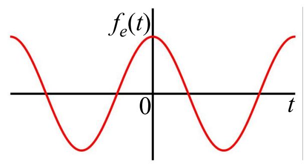
$$=\begin{cases}\dfrac{-1}{2}\left[\dfrac{\sin(n+m)t}{n+m}-\dfrac{\sin(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 & (n\neq m)\\[2ex] \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2mt-\cos 0)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dt=\pi & (n=m)\end{cases},\quad (2.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\sin(mt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(n+m)t-\sin(n-m)t\}dt$$

$$=\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-\cos(n+m)t}{n+m}+\dfrac{\cos(n-m)t}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n\neq m)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 2mt+\sin 0)dt & (n=m)\end{matrix}\right\}=0,\quad (2.5)$$

これらの関係式を三角関数の直交性という。

偶関数:



偶関数とは$f_e(t)=f_e(-t)$となる関数である。代表的なものは$\cos(t)$や定数である。偶関数の定積分では、cを任意の定数とすると、 $(u\equiv -t)$

$$\int_{-c}^{c} f_e(t)dt=\int_{-c}^{0} f_e(t)dt+\int_{0}^{c} f_e(t)dt=-\int_{c}^{0} f_e(-u)du$$

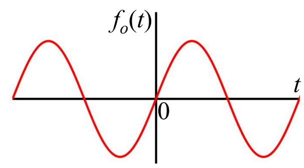
$$+\int_{0}^{c} f_e(t)dt=\int_{0}^{c} f_e(u)du+\int_{0}^{c} f_e(t)dt=2\int_{0}^{c} f_e(t)dt\,,$$

が成り立つ。特に、(実フーリエ級数展開で有用な) $c=\pi$の時には上式は、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_e(t)dt=2\int_{0}^{\pi} f_e(t)dt\,,\quad (2.6)$$

となる。

奇関数:



奇関数とは、$-f_o(t)=f_o(-t)$となる関数である。代表的なものは$\sin(t)$である。奇関数の定積分では、cを任意の定数とすると、 $(u\equiv -t)$

$$\int_{-c}^{c} f_o(t)dt=\int_{-c}^{0} f_o(t)dt+\int_{0}^{c} f_o(t)dt=-\int_{c}^{0} f_o(-u)du$$

$$+\int_{0}^{c} f_o(t)dt=-\int_{0}^{c} f_o(u)du+\int_{0}^{c} f_o(t)dt=0,$$

が成り立つ。特に、$c=\pi$の時には上式は、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_o(t)dt=0,\quad (2.7)$$

となる。

偶関数と奇関数の性質:
偶関数×偶関数=偶関数となり、奇関数×奇関数=偶関数となる。

$$f_e(-t)\cdot f_e(-t)=f_e(t)\cdot f_e(t),$$
$$f_o(-t)\cdot f_o(-t)=\left(-f_o(t)\right)\cdot\left(-f_o(t)\right)=f_o(t)\cdot f_o(t),$$

偶関数×奇関数=奇関数となる。

$$f_e(-t)\cdot f_o(-t)=-f_e(t)\cdot f_o(t),$$

偶関数±偶関数=偶関数となり、奇関数±奇関数=奇関数となる。

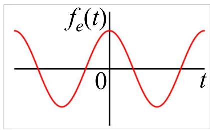
$$f_e(-t)\pm f_e(-t)=f_e(t)\pm f_e(t),$$
$$f_o(-t)\pm f_o(-t)=\left(-f_o(t)\right)\pm\left(-f_o(t)\right)=-\left(f_o(t)\pm f_o(t)\right),$$

偶関数±奇関数は偶関数でも奇関数でもない。

$$f_e(-t)\pm f_0(-t)=f_e(t)\pm\left(-f_0(t)\right)=f_e(t)\mp f_0(t)$$
$$\neq\begin{cases} f_e(t)\pm f_0(t) \\ -\left(f_e(t)\pm f_0(t)\right) \end{cases},$$

19

偶関数と奇関数の実フーリエ級数展開:
実フーリエ級数展開を行う周期関数が偶関数や奇関数の場合には、実フーリエ級数展開が簡単になる。例えば、周期関数が偶関数の場合は、



$f_e(t)$(偶関数)×$\sin(nt)$(奇関数)=$f_e(t)\cdot\sin(nt)$(奇関数),
となるので、偶関数$f_e(t)$の正弦項係数b_nは、(1.4)式と(2.7)式より、

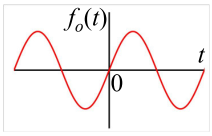
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e(t)\sin(nt)\,dt=0,\quad\left[\int_{-\pi}^{\pi} f_o(t)dt=0, (2.7)\right]$$

となり、常に0となる。従って、偶関数のフーリエ級数展開は以下の様に、定数項と余弦項だけになる。

$$f_e(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt),\quad (2.8)$$

20

一方、実フーリエ級数展開を行う周期関数が奇関数の場合には、定数項係数a_0は、(1.2)式と先程の(2.7)式より、



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o(t)dt=0,$$

となる。さらに、
$f_o(t)$(奇関数)×$\cos(nt)$(偶関数)=$f_o(t)\cdot\cos(nt)$(奇関数),
となるので、奇関数$f_o(t)$の余弦項の係数a_nも、(1.3)式と(2.7)式より同様に、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o(t)\cos(nt)\,dt=0,$$

となり、常に0となる。従って、奇関数のフーリエ級数展開は正弦項だけになる。

$$f_o(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt),\quad (2.9)$$

21

また、任意の関数$f(t)$は適当な偶関数$f_e(t)$と奇関数$f_o(t)$の和に分解することができる。例えば、

$$f_e(t)\equiv\frac{f(t)+f(-t)}{2},\quad f_o(t)\equiv\frac{f(t)-f(-t)}{2},$$

と定義すれば、

$$f_e(-t)=\frac{f(-t)+f(t)}{2}=f_e(t),$$
$$f_o(-t)=\frac{f(-t)-f(t)}{2}=-f_o(t),\quad f(t)=f_e(t)+f_o(t),$$

となっており、関数$f(t)$は偶関数と奇関数の和に分解されている。この時、この関数$f(t)$の実フーリエ級数展開も、

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t)=\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)}_{f_e(t)(\text{偶関数部分})}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)}_{f_o(t)(\text{奇関数部分})},$$

と偶関数と奇関数に割り当てることができる。

22

またこの時、定数項係数a_0、余弦項係数a_n、正弦項係数b_nは、それぞれ、

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_e(t)+f_o(t)\right)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e(t)dt\quad\left(=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f_e(t)dt\right),$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_e(t)+f_o(t)\right)\cos(nt)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e(t)\cos(nt)dt\quad\left(=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f_e(t)\cos(nt)dt\right),$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_e(t)+f_o(t)\right)\sin(nt)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o(t)\sin(nt)dt\quad\left(=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f_o(t)\sin(nt)dt\right),$$

となる。

23

実フーリエ級数展開の線形性:
基本周期$T=2\pi$の2つの関数$f(t)$と$g(t)$が、それぞれ

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt),$$
$$g(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(nt),$$

と実フーリエ級数展開できているとする。この時、pとqを定数としたfとgの線形結合$pf(t)+qg(t)$の実フーリエ級数展開は、

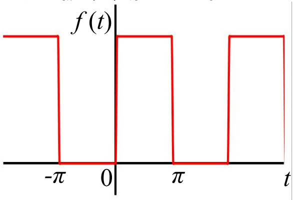
$$p\,f(t)+q\,g(t)=\frac{(p\,a_0+q\,c_0)}{2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(p\,a_n+q\,c_n)\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}(p\,b_n+q\,d_n)\sin(nt),$$

となる(証明は自明なので省略)。これを実フーリエ級数展開の線形性という。

24

例題2.1　矩形（くけい）波を実フーリエ級数展開せよ。

$$f(t)=\begin{cases}0 & (-\pi<t<0)\\ 1 & (0\le t\le\pi)\end{cases}$$



(解答)　実フーリエ級数展開の展開係数a_0は、(1.2)式より、

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot dt=1,$$

となる。また、展開係数a_nは、(1.3)式より、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}=0,$$

となる。最後に、展開係数b_nは、(1.4)式より、

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

25

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi} & (n\text{は奇数})\\ 0 & (n\text{は偶数})\end{cases},$$

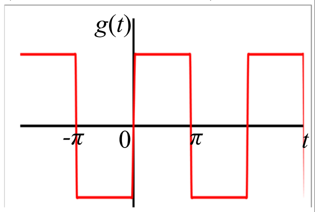
となる。従って、矩形波の実フーリエ級数展開は、

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt=\frac{1}{2}+\sum_{n=1,n\text{は奇数}}^{\infty}\frac{2\sin nt}{n\pi}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l-1)t}{(2l-1)},\qquad (n\text{は奇数}: n\equiv 2l-1)$$

となる。

(別解)　関数$g(t)\equiv f(t)-1/2$と定義すると、$g(t)$は奇関数となっているので、(2.9)式から正弦項係数b_nだけ計算すれば良い。この時の係数b_nは、



26

$$g(t)\equiv f(t)-\frac{1}{2}=\begin{cases}-1/2 & (-\pi<t<0)\\ 1/2 & (0\le t\le\pi)\end{cases},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{1}{2}\right)\sin(nt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt,$$

となり、$f(t)$の正弦項係数b_nと等しい。従って、先程の計算結果を再利用すると、関数$f(t)$の実フーリエ級数展開は、

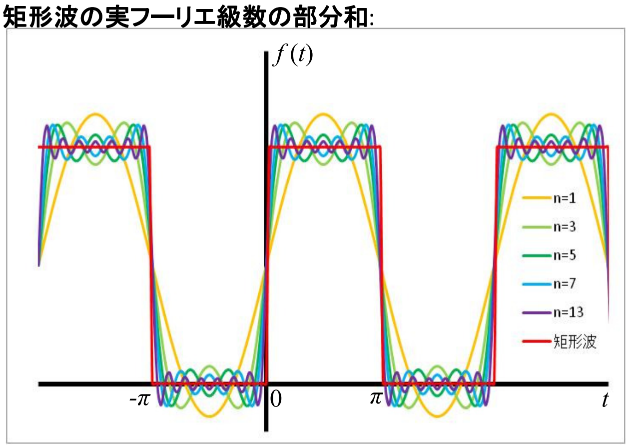
$$f(t)=g(t)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1,n\text{は奇数}}^{\infty}\frac{2\sin nt}{n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l-1)t}{(2l-1)},$$

と求められる。(補足)　矩形波はデジタルスイッチング回路のクロック信号等に使われる。

27

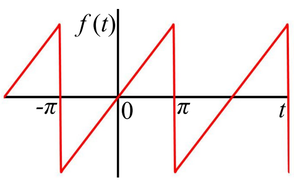
矩形波の実フーリエ級数の部分和:

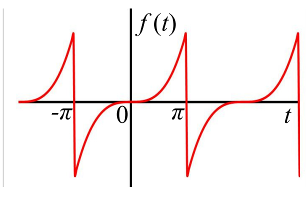


28

次回の予告:　実フーリエ級数展開の例題

様々な周期関数(鋸波、半波整流波、放物線関数、3次関数)を、例題として実フーリエ級数展開してみる。





29

付録1:　**実フーリエ級数展開の項別微分・項別積分**:

フーリエ級数の和と微分・積分を交換することを項別微分・項別積分という。例えば、$f(t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)$,とすると、項別微分は、

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)\right)\overset{?}{\Leftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{d\sin(nt)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n n\cos(nt),$$

となる。一方、項別積分は、

$$\int f(t)dt=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)\right)dt\overset{?}{\Leftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\int\sin(nt)dt\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos(nt),$$

となる。和のΣが有限個で終わっている場合は、"$\overset{?}{\Leftrightarrow}$"は"="であるが、和が1から∞まで続く場合は、一般的に"$\overset{?}{\Leftrightarrow}$"は"="と同じではない。

33

実フーリエ級数展開が項別微分できるための条件:
「周期関数 $f(t)$ が"**連続**"で、かつその導関数 $f'(t)$ を実フーリエ級数展開することができれば、$f(t)$ の実フーリエ級数展開は項別微分をすることができる。」 つまり、

$$f(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \text{とすると}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nt,$$

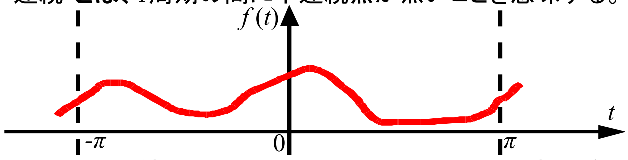
が成り立つ。

実フーリエ級数展開が項別積分できるための条件:
「周期関数 $f(t)$ が"**区分的に連続**"であれば、$f(t)$ の実フーリエ級数展開は項別積分をすることができる。」 つまり、

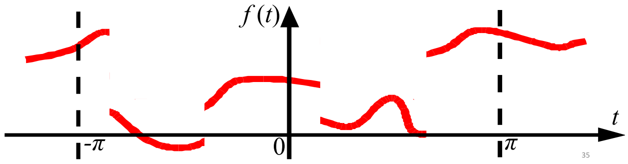
$$\int f(t)dt = \frac{a_0 t}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + C,$$

$(C:\text{積分定数})$ が成り立つ。

"連続"と"区分的に連続"の定義:
"連続"**とは**、1周期の間に不連続点が無いことを意味する。



"区分的に連続"とは、1周期の間に有限個の不連続点があっても良いが、その不連続点の近傍では関数が有限の値を持っていることを意味する。



付録2: 周期関数が実フーリエ級数展開できるための条件:
全ての周期関数が実フーリエ級数展開できるわけではない。「ある周期関数 $f(t)$ が実フーリエ級数展開できる」ためには、「その周期関数を展開した実フーリエ級数が収束する」必要がある。

そして、ある実フーリエ級数が「ディリクレ条件」を満たしていれば、その実フーリエ級数は必ず収束する(十分条件)。

ディリクレ条件(Dirichlet conditions):
基本周期 $T=2\pi$ の周期関数 $f(t)$ が $-\pi \leqq t \leqq \pi$ で"**区分的に滑らか**"ならば、その周期関数 $f(t)$ を展開した実フーリエ級数は収束する。つまり、その関数は実フーリエ級数展開できる。

("**区分的に滑らか**"とは、関数 $f(t)$ とその導関数 $f'(t)$ が共に、"**区分的に連続**"であることである。)

(補足) ディリクレ条件の数学的証明は複雑なので省略する。大雑把に言うと周期関数 $f(t)$ の1周期分の長さが有限(関数値が無限に飛ばない)ならば、収束すると考えて良い。

また、工学で出てくる様な関数は大体フーリエ級数展開も項別微分・項別積分もできると思って問題ない。