

前回の復習: 直交関数系

三角関数列や、指数関数列の様に直交性を持つ関数列を直交関数系という。

$$\begin{aligned} \text{三角関数列: } & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots \right\} \\ \text{指数関数列: } & \left\{ \dots e^{-3i\omega t}, e^{-2i\omega t}, e^{-i\omega t}, 1, e^{i\omega t}, e^{2i\omega t}, e^{3i\omega t}, \dots \right\} \end{aligned}$$

ある関数列が一次独立であるならば、その関数列の項で作った一次結合が0と等しい時、すべての係数(a_0, a_n, b_n, c_n)が0になる。

$$\text{三角関数列: } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t = 0,$$

$$\text{指数関数列: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = 0,$$

1

前回の復習:

ある関数列が直交関数系であるならば、その関数列は一次独立である。しかし、ある関数列が一次独立であっても、その関数列が直交関数系であるとは限らない。

一次独立

直交関数系

一次独立な関数列の直交化:

一般に、区間 $[a, b]$ で定義された一次独立な n 個の項から成る関数列 $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots, f_n(t)\}$ は、 $m=2$ から順番に、

$$\begin{aligned} f_m(t) & \rightarrow \tilde{f}_m(t) \\ & \equiv f_m(t) - \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{f}_k(t) \frac{\int_a^b \tilde{f}_k(t')^* \tilde{f}_m(t') dt'}{\int_a^b |\tilde{f}_k(t')|^2 dt'}, \quad (8.1) \end{aligned}$$

と変換することにより、 $\{\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t), \tilde{f}_3(t), \dots, \tilde{f}_n(t)\}$ の直交関数系にすることができる。

2

前回の復習: 直交関数系とベクトル空間

無限次元ベクトル空間でのピタゴラスの定理:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3, \dots), \quad \|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

パーシバル(Perseval)の等式:

$$\begin{aligned} f(t) & \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \\ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt & = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \quad (8.3) \end{aligned}$$

パーシバルの等式は、無限次元ベクトル空間でのピタゴラスの定理を直交関数系で表現したものである。

関数の成分表示とフーリエ級数展開:

実(複素)フーリエ級数展開は、三角(指数)関数列を基底関数とした周期関数 $f(t)$ の成分を求めることに他ならない。

前回の復習: 一般化フーリエ級数展開:

一般的に、ある区間で定義された関数 $f(t)$ は、三角関数列や指数関数列以外にも、他の正規化直交関数列(ルジャンドル多項式、エルミート多項式、ラゲール多項式等、付録参照)を使っても展開することができる。

今、区間 $[-T/2, T/2]$ で定義された正規化直交関数系 $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t), \dots\}$ があるとする。この区間で定義された任意の関数 $f(t)$ は、この正規化直交関数系を使って、

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t), \quad (8.4)$$

と級数展開することができる。また、その時の展開係数 c_n は、(8.4)式の両辺に $(\phi_m(t))^*$ を掛けて積分することにより、

$$\int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t)^* f(t) dt = c_m, \quad (8.5)$$

と求まる。

非周期関数の複素フーリエ級数展開 (フーリエ変換):

これまで学習したように、基本周期 T の周期関数 $f(t)$ の複素フーリエ級数展開は下記の(5.6)式で表される。また、その展開係数 c_n は(5.7)式で表される。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (5.6), \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (5.7),$$

これらの式を非周期関数へ適用できるように拡張する。

周期性の無い関数(非周期関数)は、基本周期 T が無限大(振動数 $\omega = 2\pi/T \Rightarrow 0$)であるとみなすことができる。従って、非周期関数 $f(t)$ では、(5.6)式と(5.7)式は、

$$\begin{aligned} f(t) & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-in\omega t'} dt' \\ & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t') e^{-in\omega t'} dt' = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-in\omega t'} dt', \end{aligned}$$

となる。ここで、 c_n の式を $f(t)$ の式に代入すると、

5

$$\begin{aligned} f(t) & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-in\omega t'} dt' \right\} \cdot e^{in\omega t} \\ & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{in\omega t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-in\omega t'} dt' \right) \right\} \cdot \omega, \end{aligned}$$

となる。ここで、和を積分に変換する下記の公式を当てはめると、

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n \cdot \omega) \omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega, \quad (\text{公式})$$

非周期関数 $f(t)$ の複素フーリエ級数展開は、

$$\begin{aligned} f(t) & = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i(n\omega)t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i(n\omega)t'} dt' \right) \right\} \cdot \omega \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) \right\} d\omega, \end{aligned}$$

と変形することができる。また、上式の定積分内の一部を、

6

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad (9.2)$$

と定義すると、先程の式は、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) \right\} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (9.1)$$

となる。上記の(9.2)式の $F(\omega)$ を $f(t)$ の複素フーリエ変換という。

(重要) 周期関数はフーリエ級数展開を使う。非周期関数はフーリエ変換を使う。また、一般にフーリエ変換とは、複素フーリエ変換のことを指す。

7

実フーリエ変換: (9.1)式と(9.2)式を変形すると、 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{i\omega(t-t')} d\omega + \int_0^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-i\omega'(t-t')} d\omega' + \int_0^{\infty} e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \right) dt' \quad (\omega' \equiv -\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \cos \omega(t-t') d\omega \right) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{\pi} \left(\int_0^{\infty} (\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') d\omega \right) dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') (\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') dt' \right\} d\omega \end{aligned}$$

8

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cos \omega t' dt' \right) \cos \omega t + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \sin \omega t' dt' \right) \sin \omega t \right\} d\omega,$$

となる。ここで、実フーリエ変換 $A(\omega)$, $B(\omega)$ を、

$$A(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cos \omega t' dt', \quad (9.4)$$

$$B(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \sin \omega t' dt', \quad (9.5)$$

と定義すると、 $f(t)$ は、

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{ A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t \} d\omega, \quad (9.3)$$

となる。これが、実フーリエ変換の公式である。

(補足) 一般に、実フーリエ変換よりも、複素フーリエ変換の方がよく使われる。

9

フーリエ変換が可能な関数:

"非周期"関数 $f(t)$ が区間 $[-\infty, \infty]$ で "区分的に滑らか" で、絶対可積分が可能な時、 $f(t)$ はフーリエ変換することができる。ここで、絶対可積分が可能とは、非周期関数 $f(t)$ が以下の式を満たすことである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t')| dt' < \infty,$$

(補足) 絶対可積分が可能な関数は、一般的に $f(-\infty) = f(\infty) = 0$ となる。

また、"区分的に滑らか" とは、関数 $f(t)$ とその導関数 $f'(t)$ が共に、"区分的に連続" であることである。

(第2回の講義資料参照)

数学的証明は複雑なので省略する。

10

複素フーリエ変換の特徴:

関数 $f(t)$ が実数の場合には、 $F(\omega)$ の複素共役は、

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t') e^{-i\omega t'})^* dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i(-\omega)t'} dt' = F(-\omega), \end{aligned}$$

となるので、 $F(\omega)$ と $F(-\omega)$ は互いに複素共役の関係になる。この場合には、 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\omega' \equiv -\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} F(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \{ F(\omega') e^{i\omega' t} \}^* d\omega' + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{Re}(F(\omega) e^{i\omega t}) d\omega, \end{aligned}$$

となり、 $F(\omega) e^{i\omega t}$ の実部(Re)がわかれば $f(t)$ を求めることができ、負の周波数に相当する部分も消える。さらに加えて、関数 $f(t)$ が実数の偶関数 ($f(-t) = f(t)$) である時には、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (t'' \equiv -t') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 f(t') e^{-i\omega t'} dt' + \int_0^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} f(-t'') e^{i\omega t''} dt'' + \int_0^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right\} \end{aligned}$$

12

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty f(t') (e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}) dt' \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t') \cos \omega t' dt',$$

となり、 $F(\omega)$ は実数になる。

一方、関数 $f(t)$ が実数の奇関数 ($f(-t) = -f(t)$) である時には、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty f(-t'') e^{i\omega t''} dt'' + \int_0^\infty f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right\}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty f(t') (e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}) dt' \right\}$$

$$= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t') \sin \omega t' dt',$$

となり、 $F(\omega)$ は純虚数になる。

例題9.1 単パルスを複素フーリエ変換せよ。ただし、 d は定数とする。

$$f(t) = \begin{cases} 1/2d, & (-d \leq t \leq d) \\ 0, & (d \leq |t|) \end{cases}$$

(解答) (9.2)式を使って、 $f(t)$ を複素フーリエ変換すると、

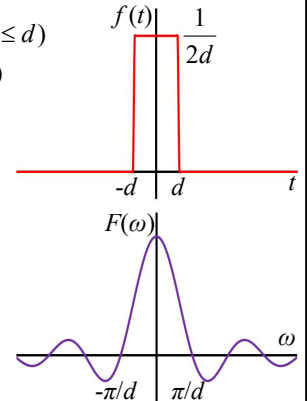
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^d \frac{1}{2d} dt'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t'}}{-2i\omega} \right]_{-d}^d$$

$$= -\frac{e^{-i\omega d} - e^{i\omega d}}{2i\sqrt{2\pi}\omega} = \frac{\sin \omega d}{\sqrt{2\pi}\omega},$$

となる。



(補足) 例題9.1で $d \rightarrow 0$ の極限を取ると、関数 $f(t)$ は、

$$\lim_{d \rightarrow 0} f(t) = \lim_{d \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{2d}, & (-d \leq t \leq d) \\ 0, & (d \leq |t|) \end{cases} = \begin{cases} \infty, & (t = 0) \\ 0, & (t \neq 0) \end{cases} \equiv \delta(t),$$

となる。上式の $\delta(t)$ をディラックの δ 関数という。ちなみに、フーリエ変換 $F(\omega)$ の方は、マクローリン展開を使うと、

$$\lim_{d \rightarrow 0} F(\omega) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega d}{\sqrt{2\pi}\omega d}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{\omega d} \left\{ \omega d - \frac{(\omega d)^3}{3!} + \frac{(\omega d)^5}{5!} - \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{(\omega d)^2}{3!} + \frac{(\omega d)^4}{5!} - \dots \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

となる。上記の $F(\omega)$ を逆フーリエ変換の公式である(9.1)式に代入すると、

$$\delta(t) = \lim_{d \rightarrow 0} f(t) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} d\omega,$$

となる。ディラックのデルタ関数は、クロネッカーのデルタを連続変数に拡張したものに相当する。

ディラック(Dirac)のデルタ関数の性質:

$$\delta(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \infty, & (t = 0) \\ 0, & (t \neq 0) \end{cases}, \quad (9.6)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-d}^d \frac{1}{2d} dt = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{t}{2d} \right]_{-d}^d = 1, \quad (9.7)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \delta(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-d}^d \frac{f(t)}{2d} dt$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \left(f(0) + \sum_{n=1}^\infty f^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!} \right) dt$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \delta(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \left[f(0)t + \sum_{n=1}^\infty f^{(n)}(0) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{-d}^d$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \left\{ 2df(0) + \sum_{n=1}^\infty f^{(n)}(0) \frac{d^{n+1} - (-d)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ f(0) + \sum_{n=1}^\infty f^{(n)}(0) \frac{d^n + (-d)^n}{2(n+1)!} \right\} = f(0), \quad (9.8)$$

フーリエ変換の性質:

一般に関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ 、 $F(\omega)$ の逆フーリエ変換を $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t)$ と書く。

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t), \quad (9.9)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t') e^{-i\omega t'} dt' \equiv \mathcal{F}[f(t)](\omega), \quad (9.10)$$

線形性: α, β を任意の定数とすると、

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)](\omega) = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega), \text{ が成り立つ。}$$

時間のシフト: t_0 を任意の定数とすると、

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t'-t_0) e^{-i\omega t'} dt'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t'') e^{-i\omega(t''+t_0)} dt'' = e^{-i\omega t_0} F(\omega), \quad (t'' \equiv t' - t_0)$$

が成り立つ。

周波数のシフト: ω_0 を任意の定数とすると、

$$\mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i(\omega-\omega_0)t'} dt' = F(\omega-\omega_0),$$

が成り立つ。

相似性: α を0でない実数とすると、

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t')e^{-i\omega t'} dt',$$

$\alpha > 0$ の時: ($t'' = \alpha t'$)

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(t'')e^{-i\omega t''} dt'' = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

$\alpha < 0$ の時:

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(t'')e^{-i\omega t''} dt'' = \frac{-1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

となる。まとめると、 $\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$, が成り立つ。

19

対称性: $F(\omega)$ の ω の代わりに t を代入した関数 $F(t)$ をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[F(t)](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t')e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t'')e^{-it't''} dt'' \right) e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t'') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t''-\omega)t'} dt' \right) dt'' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t'') \delta(-t''-\omega) dt'' = - \int_{-\infty}^{\infty} f(-t''-\omega) \delta(t'') dt'' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t''-\omega) \delta(t'') dt'' = f(-\omega), \quad (t'' \equiv -t''-\omega) \end{aligned}$$

となる。(途中でデルタ関数の性質(9.8)を使った)

20

微分演算:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df(t')}{dt'} \right) e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t')e^{-i\omega t'} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'} dt' = i\omega F(\omega), \end{aligned}$$

が成り立つ($f(\infty)=f(-\infty)=0$ を用いた)。同様にして、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t')}{dt'^n} e^{-i\omega t'} dt', \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{d^{n-1} f(t')}{dt'^{n-1}} e^{-i\omega t'} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1} f(t')}{dt'^{n-1}} e^{-i\omega t'} dt' \\ &= i\omega \cdot \mathcal{F}\left[\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right](\omega) = (i\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ。

21

積分演算: $\omega=0$ を除くと、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(s)ds\right](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^t f(s)ds \right) e^{-i\omega t} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\int_{-\infty}^{t'} f(s)ds \right) \left(\int_{-\infty}^{t'} e^{-i\omega s'} ds' \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \frac{e^{-i\omega t'}}{i\omega} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s'} ds' \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds \right) \delta(-\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'} dt' \end{aligned}$$

22

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(s)ds\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'} dt' = \frac{F(\omega)}{i\omega},$$

が成り立つ。

複素共役:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)^*](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')^* e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i(-\omega)t'} dt' \right)^* = (F(-\omega))^*, \end{aligned}$$

が成り立つ。

23

フーリエ変換のパーシバルの等式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^* f(t) dt \quad (\omega'' \equiv \omega - \omega') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega'))^* e^{-i\omega' t} d\omega' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega'))^* F(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right\} d\omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega'))^* F(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega'))^* \delta(\omega - \omega') d\omega' \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega - \omega''))^* \delta(\omega'') d\omega'' \right) d\omega \end{aligned}$$

24

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\omega))^* F(\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (9.11)$$

が成り立つ。

25

次回の予告: フーリエ変換の例題とインパルス応答

入力に δ 関数を入力した時の応答をインパルス応答という。

線形LCR回路のインパルス応答 $Q_\delta(t)$ は、

$$\left(L \frac{d^2}{dt^2} + R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \right) Q_\delta(t) = \delta(t),$$

$$Q_\delta(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega} d\omega, & (0 \leq t) \end{cases}$$

となる。

一般の線形システム T に対して、任意の入力 $V(t)$ に対する応答 $Q(t)$ は、

$$Q(t) = T[V(t)] = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') V(t') dt' \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T[\delta(t-t')] V(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} Q_\delta(t-t') V(t') dt'$$

となり、応答 $Q(t)$ はインパルス応答 $Q_\delta(t)$ と入力 $V(t)$ の合成積で与えられる。

26