ブロッホ・グリューナイゼン(Bloch-Grüneisen)の式 (弾性散乱):
物質に外部電場$\vec{E}$を印加すると、物質内部の電子の運動方程式は、

$$m_e \frac{d\overrightarrow{v_{\vec{k}}}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E}, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e\vec{E}}{\hbar}, \qquad (1)$$

となるので、定常状態かつ場所$\vec{r}$による不均一がないボルツマン方程式は、

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t}\right]_{scatt.} = \overrightarrow{v_{\vec{k}}} \cdot \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r},\vec{k},t) + \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{k}} f(\vec{r},\vec{k},t) + \frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t} = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \nabla_{\vec{k}} f(\vec{r},\vec{k},t) = -\frac{e\vec{E}}{\hbar} \cdot \nabla_{\vec{k}} f(\vec{r},\vec{k},t), \qquad (2)$$

となる。ここで定常状態の分布関数$f(\vec{r},\vec{k},t)$は、外部電場と温度勾配がない平衡状態のフェルミ・ディラック分布関数$f_0(\vec{r},\vec{k},t)$から大きくズレないとして、その差を、

$$g(\vec{r},\vec{k},t) \equiv f(\vec{r},\vec{k},t) - f_0(\vec{r},\vec{k},t), \qquad (3)$$

と置き、$g(\vec{r},\vec{k},t)$は緩和時間τ_{ph}で零に緩和すると仮定すると、電子のエネルギーを$\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 \left|\vec{k}\right|^2 / 2m_e$として、

$$-\frac{g(\vec{r},\vec{k},t)}{\tau_{ph}} = \left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t}\right]_{scatt.} = -\frac{e\vec{E}}{\hbar} \cdot \nabla_{\vec{k}} f(\vec{r},\vec{k},t),$$

$$\begin{aligned} g(\vec{r},\vec{k},t) &= \frac{e\tau_{ph}\vec{E}}{\hbar} \cdot \nabla_{\vec{k}} f(\vec{r},\vec{k},t) = \frac{e\tau_{ph}\vec{E}}{\hbar} \cdot \frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \nabla_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \left|\vec{k}\right|^2}{2m_e} = \frac{e\tau_{ph}\vec{E}}{\hbar} \cdot \frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m_e} \\ &= e\tau_{ph} \frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \vec{E} \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m_e} = e\tau_{ph} \frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{v_{\vec{k}}} = e\tau_{ph} \left(\frac{\partial g(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} + \frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \right) \vec{E} \cdot \overrightarrow{v_{\vec{k}}}, \end{aligned} \qquad (4)$$

となる。また$g(\vec{r},\vec{k},t)$は$\vec{E}$の一次の微小量なので、右辺第一項は$\vec{E}$の二次の微小量に相当しオームの法則からのズレを表しているので今回は省略して、

$$g(\vec{r},\vec{k},t) = e\tau_{ph} \frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{v_{\vec{k}}}, \qquad (5)$$

となる。(5)を(4)の最初の式に代入して、

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t}\right]_{scatt.} = -e \frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{v_{\vec{k}}}, \qquad (6)$$

となる。一方でフェルミの黄金則から、伝導電子が$\vec{k}$から$\vec{k'}$へ散乱される遷移確率$P_{\vec{k'},\vec{k}}$は、散乱ポテンシャルを$\Delta U(\vec{r})$、散乱時のエネルギー変化を$\Delta\epsilon_{\vec{k'},\vec{k}}$すると、

$$P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2 \delta\left(\epsilon_{\overrightarrow{k'}} - \epsilon_{\vec{k}} + \Delta\epsilon_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right), \qquad (7)$$

$$\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}} \equiv \iiint \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)^* \Delta U(\vec{r}) e^{-i\overrightarrow{k'}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \iiint e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\vec{r}} \Delta U(\vec{r}) d\vec{r} = \Delta U_{\vec{k},\overrightarrow{k'}}{}^*, \qquad (8)$$

となるが、弾性散乱だけを考えると

$$\Delta\epsilon_{\overrightarrow{k'},\vec{k}} = 0,\ P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}} = P_{\vec{k},\overrightarrow{k'}},\ f_0(\vec{r},\vec{k},t) = f_0\left(\vec{r},\overrightarrow{k'},t\right), \quad (9)$$

なので、

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t}\right]_{scatt.} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\overrightarrow{k'}\left(1-f(\vec{r},\vec{k},t)\right)f\left(\vec{r},\overrightarrow{k'},t\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\overrightarrow{k'}f(\vec{r},\vec{k},t)\left(1-f(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\overrightarrow{k'}\left(f(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)-f(\vec{r},\vec{k},t)\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\overrightarrow{k'}\left(g(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)-g(\vec{r},\vec{k},t)\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$=\frac{e\tau_{ph}}{(2\pi)^3}\iiint d\overrightarrow{k'}\left(\frac{\partial f_0(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)}{\partial\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$=\frac{e\tau_{ph}}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\left|\overrightarrow{k'}\right|\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\left|\overrightarrow{k'}\right|^2\sin\theta'\,\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial f_0(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)}{\partial\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$=\frac{e\tau_{ph}}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{d\left|\overrightarrow{k'}\right|}{d\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}d\epsilon_{\overrightarrow{k'}}\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\left|\overrightarrow{k'}\right|^2\sin\theta'\,\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial f_0(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)}{\partial\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)P_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$$

$$=\frac{e\tau_{ph}}{\hbar(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m_e}{2\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}}d\epsilon_{\overrightarrow{k'}}\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\left|\overrightarrow{k'}\right|^2\sin\theta'\,\vec{E}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial f_0(\vec{r},\overrightarrow{k'},t)}{\partial\epsilon_{\overrightarrow{k'}}}\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2\delta\left(\epsilon_{\vec{k}}-\epsilon_{\overrightarrow{k'}}\right)$$

$$=\frac{e\tau_{ph}\left|\vec{k}\right|^2}{(2\pi\hbar)^2}\sqrt{\frac{m_e}{2\epsilon_{\vec{k}}}}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\sin\theta'\,\vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2$$

$$=\frac{e\tau_{ph}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{(2\pi)^2\hbar^4}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\sin\theta'\,\vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2, \qquad (10)$$

となる。途中で(5)式を使った。ここで、$\overrightarrow{v_{\vec{k}}}$の方向を z 軸に取ると、$\vec{k}$と$\overrightarrow{k'}$のなす角$\theta_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}=\theta'$となり$\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$は$\theta_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}$だけの関数となる。また、

$$\vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{v_{\overrightarrow{k'}}}-\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right)=E_xv_{k'x}+E_yv_{k'y}+E_z(v_{k'z}-v_{kz})=\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|\left\{E_x\sin\theta'\cos\varphi'+E_y\sin\theta'\sin\varphi'+E_z(\cos\theta'-1)\right\}, \qquad (11)$$

なので、

$$\left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial t}\right]_{scatt.}=\frac{e\tau_{ph}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{(2\pi)^2\hbar^4}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|\int_0^\pi d\theta'\sin\theta'\left\{E_x\sin\theta'\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,d\varphi'\right.$$

$$\left.+E_y\sin\theta'\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,d\varphi'+E_z(\cos\theta'-1)\int_0^{2\pi}d\varphi'\right\}\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2$$

$$=\frac{e\tau_{ph}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{2\pi\hbar^4}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}E_z\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|\int_0^\pi d\theta'\sin\theta'(\cos\theta'-1)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2$$

$$=\frac{e\tau_{ph}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{2\pi\hbar^4}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial\epsilon_{\vec{k}}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\int_0^\pi d\theta'\sin\theta'(\cos\theta'-1)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2, \qquad (12)$$

となり、(6)と(12)より、

$$-e\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{v_{\vec{k}}} = \frac{e\tau_{ph}\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{2\pi\hbar^4}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{k},t)}{\partial \epsilon_{\vec{k}}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\int_0^\pi d\theta'\sin\theta'\,(\cos\theta'-1)\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2,$$

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{\left|\overrightarrow{v_{\vec{k}}}\right|{m_e}^2}{2\pi\hbar^4}\int_0^\pi d\theta'\sin\theta'\,(1-\cos\theta')\left|\Delta U_{\overrightarrow{k'},\vec{k}}\right|^2, \qquad (13)$$

となる。また、原子一個が作るポテンシャルを$U_0(\vec{r})$とすると、結晶中で電子が感じるポテンシャル$U(\vec{r})$は、結晶中の原子数を Nとして並進ベクトル$\overrightarrow{R_n}$を用いて、

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N} U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}\right), \qquad (14)$$

と表される。この各原子位置$\overrightarrow{R_n}$に波数を$\vec{q}$とした第 8 回目の(8.2)式の変位の足し合わせ$\overrightarrow{u_n}$が加わると、差分$\Delta U(\vec{r})$は、

$$\overrightarrow{u_n} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}}\overrightarrow{A_{\vec{q}}}e^{i\vec{q}\cdot\overrightarrow{R_n}}, \qquad (15)$$

$$\Delta U(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N}\left\{U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}-\overrightarrow{u_n}\right)-U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}\right)\right\}, \qquad (16)$$

となる。$\vec{q}$の和は全てのフォノンモードについて取る。$1/\sqrt{N}$は規格化定数である。従って、

$$\Delta U_{k'k} = \iiint e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\vec{r}}\Delta U(\vec{r})d\vec{r} = \iiint e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\vec{r}}\sum_{n=1}^{N}\left\{U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}-\overrightarrow{u_n}\right)-U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}\right)\right\}d\vec{r}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left\{e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{R_n}+\overrightarrow{u_n}\right)}\iiint e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}-\overrightarrow{u_n}\right)}U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}-\overrightarrow{u_n}\right)d\vec{r}\right.$$

$$\left.-e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}}\iiint e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}\right)}U_0\left(\vec{r}-\overrightarrow{R_n}\right)d\vec{r}\right\}, \qquad (17)$$

となる。(17)式右辺中の２つの積分は全空間(少なくとも結晶全体)に渡って取るべきものだが、$U_0(\vec{r})$の影響が及ぶ範囲は狭くて、最近接原子に至るまでにはほとんど零になるので、$\overrightarrow{R_n}$にはよらない。よって、

$$\overline{U_{atom}} \equiv N\iiint_{\text{全空間}} e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\vec{r}}U_0(\vec{r})d\vec{r} = N\iiint_{\text{原点付近}} e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\vec{r}}U_0(\vec{r})d\vec{r}, \qquad (18)$$

と定義してまとめると、

$$\Delta U_{k'k} = \frac{\overline{U_{atom}}}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{R_n}+\overrightarrow{u_n}\right)}-e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}}\right\} = \frac{\overline{U_{atom}}}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}}\left\{e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\overrightarrow{u_n}}-1\right\}$$

$$\cong \frac{\overline{U_{atom}}}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}}\left\{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}}\overrightarrow{A_{\vec{q}}}e^{i\vec{q}\cdot\overrightarrow{R_n}}\right\}$$

$$= i\frac{\overline{U_{atom}}}{N}\sum_{\vec{q}}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{A_{\vec{q}}}}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}+\vec{q}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}} = i\overline{U_{atom}}\sum_{\vec{q}}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{A_{\vec{q}}}}{\sqrt{N}}\delta_{\overrightarrow{k'}-\vec{k},\vec{q}}$$

$$= i\overline{U_{atom}}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}}{\sqrt{N}}, \qquad (19)$$

$$\text{参考:}\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}+\vec{q}\right)\cdot\overrightarrow{R_n}} = \delta_{\overrightarrow{k'}-\vec{k},\vec{q}}$$

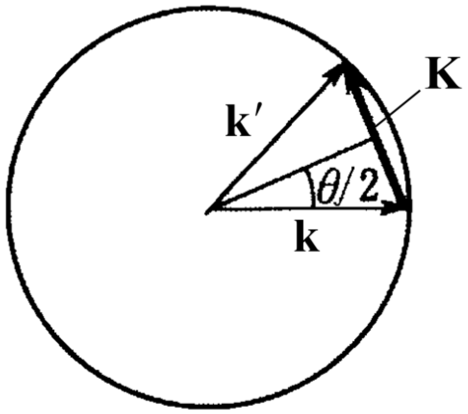
となる。和は通常過程では$\vec{q}=\overrightarrow{k'}-\vec{k}$を満たすフォノンモードについて取るが、ウムクラップ過程の場合は$\vec{q}=\overrightarrow{k'}-\vec{k}-\overrightarrow{G_g}$, ($\overrightarrow{G_g}$は逆格子ベクトル)について取る(複数の$\vec{q}$が該当する場合には足し合わせる)。従って、縦波と横波のフォノンの 3 つのモードを区別しない場合には、

$$|\Delta U_{k'k}|^2=\left|\overline{U_{atom}}\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}}{\sqrt{N}}\right|^2=|\overline{U_{atom}}|^2\left|\left(\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}}{\sqrt{N}}\right|^2=\frac{1}{3N}|\overline{U_{atom}}|^2\left|\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right|^2\left|\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}\right|^2, \qquad (20)$$

となる。また第 9 回目の(9.1)式と(9.8)式から、質量Mの原子がバネ定数$K=M\omega^2$のバネで格子点に繋がれているとすると、その自由度は 6 なので(零点振動を除いた)エネルギー$\langle E\rangle$を介して、

$$\langle E\rangle\cong 6\frac{M\omega^2}{2N}\left|\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}\right|^2\cong\frac{3\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}, \qquad \left|\overrightarrow{A_{\overrightarrow{k'}-\vec{k}}}\right|^2\cong\frac{N\hbar}{M\omega\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1\right)}$$

$$|\Delta U_{k'k}|^2=\frac{\hbar|\overline{U_{atom}}|^2\left|\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right|^2}{3M\omega\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1\right)}=\frac{\hbar|\overline{U_{atom}}|^2\left|\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right|^2}{3Mv_s\left|\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right|\left(e^{\frac{\hbar v_s\left|\vec{k}-\overrightarrow{k'}\right|}{k_BT}}-1\right)}=\frac{2\hbar|\overline{U_{atom}}|^2\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{3Mv_s\left(e^{\frac{2\hbar v_s\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{k_BT}}-1\right)}, \qquad (21)$$



となる（v_sは結晶中のフォノンの速度)。$|\overline{U_{atom}}|^2$は近似的にθ'にあまり依存しないとして積分の外へ出すと（13)式は、

$$\frac{1}{\tau_{ph}}=\frac{|\overrightarrow{v_k}|{m_e}^2}{2\pi\hbar^4}\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\,(1-\cos\theta')\frac{2\hbar|\overline{U_{atom}}|^2\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{3Mv_s\left(e^{\frac{2\hbar v_s\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{k_BT}}-1\right)}$$

$$=\frac{\left|\vec{k}\right||\overrightarrow{v_k}||\overline{U_{atom}}|^2{m_e}^2}{3\pi\hbar^3Mv_s}\int_0^{\pi}d\theta'\frac{4\cos\frac{\theta'}{2}\sin^4\frac{\theta'}{2}}{\left(e^{\frac{2\hbar v_s\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{k_BT}}-1\right)}, \qquad (22)$$

となる。ここで、

$$x\equiv\frac{\hbar\omega}{k_BT}=\frac{2\hbar v_s\left|\vec{k}\right|\sin\frac{\theta'}{2}}{k_BT}, \qquad (23)$$

と定義すると、$\hbar\omega>k_B\theta_D$の範囲にある高振動数のフォノンによる散乱は急激に減少するので、積分範囲を

$$0 < x < \frac{\theta_D}{T}, \qquad (24)$$

とすると(22)式は、

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{\left|\vec{k}\right| |\overrightarrow{v_k}| |\overline{U_{atom}}|^2 {m_e}^2}{3\pi\hbar^3 M v_s} \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} dx \left(\frac{k_B T}{2\hbar v_s \left|\vec{k}\right|}\right)^5 \frac{8x^4}{(e^x - 1)} = \frac{8\left|\vec{k}\right| |\overrightarrow{v_k}| |\overline{U_{atom}}|^2 {m_e}^2}{3\pi\hbar^3 M v_s} \left(\frac{k_B T}{2\hbar v_s \left|\vec{k}\right|}\right)^5 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} dx \frac{x^4}{(e^x - 1)}, \qquad (25)$$

$$\rho_{ph} = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_{ph}} = \frac{8\left|\vec{k}\right| |\overrightarrow{v_k}| |\overline{U_{atom}}|^2 {m_e}^3}{3\pi n_e e^2 \hbar^3 M v_s} \left(\frac{k_B T}{2\hbar v_s \left|\vec{k}\right|}\right)^5 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} dx \frac{x^4}{(e^x - 1)}, \qquad (26)$$

となる。