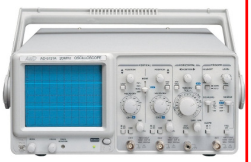
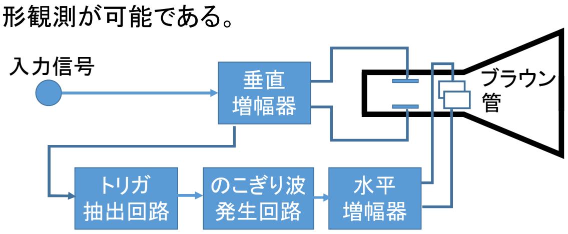
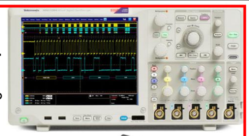
前回の復習: 電子計測器:
(アナログ)オシロスコープ:



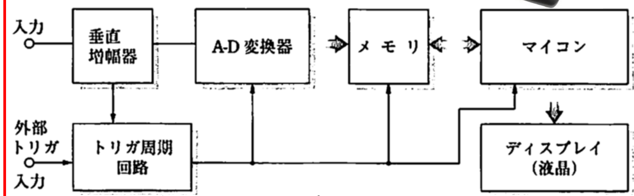
- X軸に周期的なのこぎり波を入力し、Y軸に観測したい電気信号を入力して、ブラウン管(CRT)上にその波形を映し出して観測する。
- 直流から数GHzまでの帯域の波形観測が可能である。



ディジタルオシロスコープ: 前回の復習:

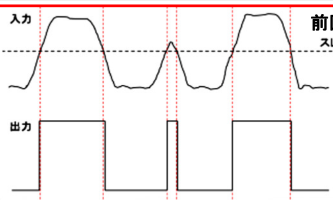



一定の時間間隔でアナログ信号をサンプリングしてディジタルに変換する。それを波形データにしてディスプレイに表示。同期加算技術でS/N比の改善も可能。トリガ以前の波形を観察できるプリトリガ機能を持つものもある。現在ではほぼすべてこのタイプ。

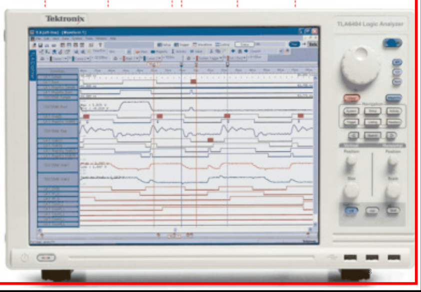


ディジタルオシロスコープの原理（参考書より転載）

ロジックアナライザ: **前回の復習:**



ディジタル回路のデバッグ等に利用される。多チャンネル(数10〜数100)のロジック信号波形と、それを閾値で'0'と'1'に2値化した値を同時に観測できる。また、信号を8ビット幅等のバスのデータとして読み取ってバイトやワード単位で表示させることもできる。



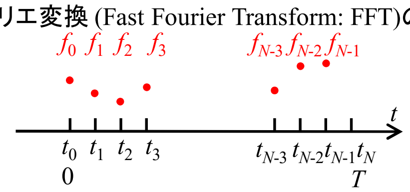
前回の復習: サンプリングオシロスコープ: Δtでのサンプリングが困難なとき、$T+\Delta t$あるいは$nT+\Delta t$ (nは整数)のサンプリングによって原波形をΔt毎にサンプリングした場合と等価な観測結果を得る。

ミックスド・シグナル・オシロスコープ: アナログ信号とデジタル信号の両方を表示でき、ロジック・アナライザの機能を一部併せ持つデジタルオシロスコープ。

スペクトラムアナライザー:
時間波形の信号を高速フーリエ変換することで、信号の周波数分布を求めることができる。

ネットワークアナライザ: 高周波電子回路網の通過・反射電力の周波数特性を測定する測定器。回路のインピーダンス整合の確認や伝送ケーブル内での反射箇所の特定などに利用される。

離散フーリエ変換(Discrete Fourier Transform: DFT):
高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT)の下準備



区間$[0,T]$をN分割した各点t_lで、ある関数$f(t)$の関数値f_lがサンプリングされているとする。つまり、

$$f_l \equiv f(t_l) = f(lT/N), \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

この時、関数$f(t)$に似せた擬似的な関数$f_s(t)$をデルタ関数(付録1参照)を使って、

$$f_s(t) \equiv \frac{C}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\delta(t-t_l) = \frac{C}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{lT}{N}\right)\delta\left(t-\frac{lT}{N}\right),$$

と定義する(Cは定数)。この関数$f_s(t)$を0からTまで積分して$N\to\infty$の極限を取ったものが、元の関数$f(t)$を0からTまで積分したものと等しくなるように定数Cを定める。

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T f_s(t)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{C}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{lT}{N}\right)\int_0^T \delta\left(t-\frac{lT}{N}\right)dt$$

ここで、lT/Nは区間$[0,T]$内にあるので、上式の最後の積分はδ関数の性質(12.F2)から1となり、

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T f_s(t)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{C}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{lT}{N}\right)$$

$$= \frac{C}{T}\lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{lT}{N}\right)\frac{T}{N}$$

となる。ここで、和を積分に変換する以下の公式を使うと、

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{lT}{N}\right)\frac{T}{N} = \int_0^T f(t)dt,\quad (公式)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T f_s(t)dt = \frac{C}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

となる。これが、関数$f(t)$を0からTまで積分したものと等しいので、

$$\frac{C}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \qquad C = T,$$

$$f_s(t) = \frac{T}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\,\delta\left(t-\frac{lT}{N}\right), \qquad (12.1)$$

となる。次に、関数$f_s(t)$を周期Tの周期関数とみなして、複素フーリエ級数展開すると、工業数学の公式(付録2)から展開係数c_mは、(i: 虚数単位)

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f_s(t)e^{-im\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^T \sum_{l=0}^{N-1} f_l\,\delta\left(t-\frac{lT}{N}\right)e^{-im\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\int_0^T \delta\left(t-\frac{lT}{N}\right)e^{-im\omega t}dt \;= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-\frac{im\omega T}{N}l}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}, \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

となる。ちなみに、この展開係数c_mは、

$$c_{m+N} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{\frac{-2\pi i}{N}l(m+N)} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-\left(\frac{2\pi i}{N}lm + 2\pi i l\right)}$$

$$c_{m+N} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{\frac{-2\pi i}{N}lm} = c_m,$$

となり、N個ズレると元に戻る。つまり周期Nを持つ。一方、展開係数c_mを用いて、以下の逆フーリエ級数を計算してみると(kは0～$N-1$の範囲内の任意の自然数)、

$$\sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{\frac{-2\pi i}{N}lm}\, e^{\frac{2\pi i}{N}mk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left\{ f_k + \sum_{l=0,l\neq k}^{N-1} f_l e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)}\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\frac{f_k}{N} + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0,l\neq k}^{N-1} f_l e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)}$$

$$= f_k + \sum_{l=0,l\neq k}^{N-1}\frac{f_l}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)}$$

$$= f_k + \sum_{l=0,l\neq k}^{N-1}\frac{f_l}{N}\frac{1-e^{2\pi i(k-l)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{N}(k-l)}} = f_k,$$

$$\left(等比数列: \sum_{m=0}^{N-1} r^m = \frac{1-r^N}{1-r}, \quad e^{2\pi i(k-l)} = 1\right)$$

となり、元のサンプリング値f_kが得られる。

以上をまとめると、離散逆フーリエ変換とフーリエ変換は、

$$f_l = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{\frac{2\pi i}{N}lm}\ (12.2), \quad c_m = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{\frac{-2\pi i}{N}lm}\ (12.3)$$

となる。(**注意**: 名前は変換でも、実際は級数展開)

また、上記の計算過程から、離散フーリエ変換の基底関数の直交性は、($\delta_{k,l}$: クロネッカーのデルタ)

$$\sum_{m=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}lm}\right)^* e^{\frac{2\pi i}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)},$$

$k = l$の時: $$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)} = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N,$$

$k \neq l$の時: $$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-l)} = \frac{1-e^{2\pi i(k-l)}}{1-e^{(2\pi i/N)(k-l)}} = 0,$$

まとめると、

$$\sum_{m=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}lm}\right)^* e^{\frac{2\pi i}{N}km} = N\delta_{k,l}, \qquad (12.4)$$

となる。

離散フーリエ変換の性質:
離散フーリエ変換でも、工業数学等で学習したフーリエ級数展開の性質は成り立つ。以下にいくつかの代表的な例を示す。(g_lのフーリエ級数展開の展開係数をd_mとする)

線形性: $$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(\alpha f_l+\beta g_l)\,e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}=\frac{\alpha}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_l e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}$$
$$+\frac{\beta}{N}\sum_{l=0}^{N-1}g_l e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}=\alpha c_m+\beta d_m,\qquad(12.5)$$

時間のシフト: $$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_{l+l'}e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}$$
$$=e^{\frac{2\pi i}{N}l'm}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_{l+l'}e^{-\frac{2\pi i}{N}m(l+l')}=e^{\frac{2\pi i}{N}l'm}c_m,\ (12.6)$$

13

周波数のシフト: $$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left(f_l e^{-\frac{2\pi i}{N}lm'}\right)e^{-\frac{2\pi i}{N}lm}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_l e^{-\frac{2\pi i}{N}l(m+m')}=c_{m+m'},\qquad(12.7)$$

合成積: $$(f*g)_l\equiv\sum_{k=0}^{N-1}f_{l-k}g_k=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}c_m e^{\frac{2\pi i}{N}(l-k)m}\right)$$
$$\times\left(\sum_{n=0}^{N-1}d_n e^{\frac{2\pi i}{N}kn}\right)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}k(n-m)}c_m d_n e^{\frac{2\pi i}{N}lm}$$
$$=N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\delta_{m,n}c_m d_n e^{\frac{2\pi i}{N}lm}=\sum_{m=0}^{N-1}(Nc_m d_m)e^{\frac{2\pi i}{N}lm},$$
なので、

14

$$(f*g)_l=\sum_{m=0}^{N-1}(Nc_m d_m)e^{\frac{2\pi i}{N}lm},\qquad(12.8)$$
$$Nc_m d_m=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(f*g)_l e^{\frac{-2\pi i}{N}lm},\qquad(12.9)$$

通常の積: $$f_l\cdot g_l=\left(\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{\frac{2\pi i}{N}lk}\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}d_n e^{\frac{2\pi i}{N}ln}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}c_k d_n e^{\frac{2\pi i}{N}l(k+n)}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=n}^{N+n-1}c_{m-n}d_n e^{\frac{2\pi i}{N}lm}$$
$$=\sum_{m=n}^{N+n-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}c_{m-n}d_n\right)e^{\frac{2\pi i}{N}lm}$$

15

$$f_l\cdot g_l=\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}c_{m-n}d_n\right)e^{\frac{2\pi i}{N}lm},$$
なので(最後は展開係数の周期性を使った)、
$$f_l\cdot g_l=\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}c_{m-n}d_n\right)e^{\frac{2\pi i}{N}lm},\qquad(12.10)$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}c_{m-n}d_n=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}(f_l\cdot g_l)e^{\frac{-2\pi i}{N}lm},\qquad(12.11)$$

16

パーシバルの等式:
$$\sum_{l=0}^{N-1}|f_l|^2=\sum_{l=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}c_m e^{\frac{2\pi i}{N}lm}\right)^*\left(\sum_{n=0}^{N-1}c_n e^{\frac{2\pi i}{N}ln}\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}l(n-m)}\right)(c_m)^*c_n$$
$$=N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\delta_{m,n}(c_m)^*c_n=N\sum_{m=0}^{N-1}|c_m|^2,\qquad(12.12)$$

17

離散フーリエ変換の行列表示: 下記の様にW_Nを定義すると、離散フーリエ変換(12.2),(12.3)式は、
$$f_l=\sum_{m=0}^{N-1}c_m e^{\frac{2\pi i}{N}lm}=\sum_{m=0}^{N-1}c_m {W_N}^{-lm},$$
$$c_m=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_l e^{\frac{-2\pi i}{N}lm}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_l\,{W_N}^{lm},\quad\left(W_N\equiv e^{-\frac{2\pi i}{N}}\right)$$
となる。従って、離散フーリエ変換は行列を使って、
$$N\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{N-2}\\c_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&{W_N}^1&\cdots&{W_N}^{N-2}&{W_N}^{N-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&{W_N}^{N-2}&\cdots&{W_N}^{(N-2)^2}&{W_N}^{(N-2)(N-1)}\\1&{W_N}^{N-1}&\cdots&{W_N}^{(N-1)(N-2)}&{W_N}^{(N-1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\\vdots\\f_{N-2}\\f_{N-1}\end{pmatrix}$$
(12.13)、と表される。同様に、離散逆フーリエ変換は、

18

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & W_N{}^{-1} & \cdots & W_N{}^{-(N-2)} & W_N{}^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N{}^{-(N-2)} & \cdots & W_N{}^{-(N-2)^2} & W_N{}^{-(N-2)(N-1)} \\ 1 & W_N{}^{-(N-1)} & \cdots & W_N{}^{-(N-1)(N-2)} & W_N{}^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

(12.14)、と表される。

高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT):
離散フーリエ変換を行うには(12.13)式、逆フーリエ変換を行うには(12.14)式を計算すれば良い。これらの行列計算では、通常サンプリング数 N の2乗(N^2)回の掛け算を行う必要がある。

しかし、サンプリング数Nが2の累乗数(2, 4, 8, 16, …)の時は、この行列計算の計算量を大幅に減らすことができる。この方法を高速フーリエ変換(FFT)という。FFTを使うと、電子計算機で高速に離散フーリエ変換を行うことができる。

簡単のために以下では、N=8として説明する。今、サンプリング値($f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$)は既に分かっているとして、展開係数($c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$)を求めるものとする。

行列(12.13)式は、

$$8\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8{}^1 & W_8{}^2 & W_8{}^3 & W_8{}^4 & W_8{}^5 & W_8{}^6 & W_8{}^7 \\ 1 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 & \boxed{W_8{}^8} & W_8{}^{10} & W_8{}^{12} & W_8{}^{14} \\ 1 & W_8{}^3 & W_8{}^6 & W_8{}^9 & W_8{}^{12} & W_8{}^{15} & W_8{}^{18} & W_8{}^{21} \\ 1 & W_8{}^4 & \boxed{W_8{}^8} & W_8{}^{12} & \boxed{W_8{}^{16}} & W_8{}^{20} & \boxed{W_8{}^{24}} & W_8{}^{28} \\ 1 & W_8{}^5 & W_8{}^{10} & W_8{}^{15} & W_8{}^{20} & W_8{}^{25} & W_8{}^{30} & W_8{}^{35} \\ 1 & W_8{}^6 & W_8{}^{12} & W_8{}^{18} & \boxed{W_8{}^{24}} & W_8{}^{30} & W_8{}^{36} & W_8{}^{42} \\ 1 & W_8{}^7 & W_8{}^{14} & W_8{}^{21} & W_8{}^{28} & W_8{}^{35} & W_8{}^{42} & W_8{}^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

となる。また、

$$W_8 \equiv e^{-\frac{2\pi i}{8}}, \quad W_8{}^8 = e^{-\frac{2\pi i}{8}8} = 1, \quad \left(W_8{}^8\right)^n = 1^n = 1,$$

なので、W_8の8乗以上のものは全て8乗未満にできて、

$$8\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8{}^1 & W_8{}^2 & W_8{}^3 & W_8{}^4 & W_8{}^5 & W_8{}^6 & W_8{}^7 \\ 1 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 & 1 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 \\ 1 & W_8{}^3 & W_8{}^6 & W_8{}^1 & W_8{}^4 & W_8{}^7 & W_8{}^2 & W_8{}^5 \\ 1 & W_8{}^4 & 1 & W_8{}^4 & 1 & W_8{}^4 & 1 & W_8{}^4 \\ 1 & W_8{}^5 & W_8{}^2 & W_8{}^7 & W_8{}^4 & W_8{}^1 & W_8{}^6 & W_8{}^3 \\ 1 & W_8{}^6 & W_8{}^4 & W_8{}^2 & 1 & W_8{}^6 & W_8{}^4 & W_8{}^2 \\ 1 & W_8{}^7 & W_8{}^6 & W_8{}^5 & W_8{}^4 & W_8{}^3 & W_8{}^2 & W_8{}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、偶数行(0,2,4,6)を見ると、列の左右で同じ並びになっている。一方、奇数行(1,3,5,7)をみると、左側に$W_8{}^4$を掛けたものが右側になっている。($W_8{}^8$ =1に注意)

従って、この行列の偶数行と奇数行を、2つの別々の行列に分割すると、

$$8\begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_4 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 \\ 1 & W_8{}^4 & 1 & W_8{}^4 \\ 1 & W_8{}^6 & W_8{}^4 & W_8{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \end{pmatrix},$$

$$8\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_8{}^1 & W_8{}^2 & W_8{}^3 \\ 1 & W_8{}^3 & W_8{}^6 & W_8{}^1 \\ 1 & W_8{}^5 & W_8{}^2 & W_8{}^7 \\ 1 & W_8{}^7 & W_8{}^6 & W_8{}^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + W_8{}^4 f_4 \\ f_1 + W_8{}^4 f_5 \\ f_2 + W_8{}^4 f_6 \\ f_3 + W_8{}^4 f_7 \end{pmatrix}$$

と分けられる。この2つの行列も、また左右で対称性がある。具体的にいうと、上の行列の偶数行は左右で同じ、奇数行は左側に$W_8{}^4$を掛けたものが右側になっている。一方、下の行列の偶数行は左側に$W_8{}^2$を掛けたものが右側に、奇数行は左側に$W_8{}^6$を掛けたものが右側になっている。

従って、また行列の偶数行と奇数行をそれぞれ分割して別々の行列にすると、

$$8\begin{pmatrix} c_0 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_8{}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + f_4 + f_2 + f_6 \\ f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \end{pmatrix},$$

$$8\begin{pmatrix} c_2 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_8{}^2 \\ 1 & W_8{}^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + f_4 + W_8{}^4 (f_2 + f_6) \\ f_1 + f_5 + W_8{}^4 (f_3 + f_7) \end{pmatrix},$$

$$8\begin{pmatrix} c_1 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_8{}^1 \\ 1 & W_8{}^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + W_8{}^4 f_4 + W_8{}^2 (f_2 + W_8{}^4 f_6) \\ f_1 + W_8{}^4 f_5 + W_8{}^2 (f_3 + W_8{}^4 f_7) \end{pmatrix},$$

$$8\begin{pmatrix} c_3 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W_8{}^3 \\ 1 & W_8{}^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + W_8{}^4 f_4 + W_8{}^6 (f_2 + W_8{}^4 f_6) \\ f_1 + W_8{}^4 f_5 + W_8{}^6 (f_3 + W_8{}^4 f_7) \end{pmatrix},$$

と4つの行列(12.15)式にできる。この(12.15)式を8×8行列の3つの掛け算で表すと、以下の様になる。

(12.15)式をそのまま8×8行列にしたもの

$$8\begin{pmatrix} C_0 \\ C_4 \\ C_2 \\ C_6 \\ C_1 \\ C_5 \\ C_3 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_0 + f_4 + f_2 + f_6 \\ f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \\ f_0 + f_4 + W_8^4(f_2 + f_6) \\ f_1 + f_5 + W_8^4(f_3 + f_7) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^2(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^2(f_3 + W_8^4 f_7) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^6(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^6(f_3 + W_8^4 f_7) \end{pmatrix},$$

行を並び替えた。

$$8\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^3 \\ 1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_0 + f_4 + f_2 + f_6 \\ f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \\ f_0 + f_4 + W_8^4(f_2 + f_6) \\ f_1 + f_5 + W_8^4(f_3 + f_7) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^2(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^2(f_3 + W_8^4 f_7) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^6(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^6(f_3 + W_8^4 f_7) \end{pmatrix},$$

列も並び替えた。

$$8\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_0 + f_4 + f_2 + f_6 \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^2(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_0 + f_4 + W_8^4(f_2 + f_6) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^6(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^2(f_3 + W_8^4 f_7) \\ f_1 + f_5 + W_8^4(f_3 + f_7) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^6(f_3 + W_8^4 f_7) \end{pmatrix},$$

最後の行列を掛け算で表す。

$$\begin{pmatrix} f_0 + f_4 + f_2 + f_6 \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^2(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_0 + f_4 + W_8^4(f_2 + f_6) \\ f_0 + W_8^4 f_4 + W_8^6(f_2 + W_8^4 f_6) \\ f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^2(f_3 + W_8^4 f_7) \\ f_1 + f_5 + W_8^4(f_3 + f_7) \\ f_1 + W_8^4 f_5 + W_8^6(f_3 + W_8^4 f_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_0 + W_8^4 f_4 \\ f_2 + f_6 \\ f_2 + W_8^4 f_6 \\ f_1 + f_5 \\ f_1 + W_8^4 f_5 \\ f_3 + f_7 \\ f_3 + W_8^4 f_7 \end{pmatrix},$$

もう一回最後の行列を掛け算で表す。

$$\begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_0 + W_8^4 f_4 \\ f_2 + f_6 \\ f_2 + W_8^4 f_6 \\ f_1 + f_5 \\ f_1 + W_8^4 f_5 \\ f_3 + f_7 \\ f_3 + W_8^4 f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix},$$

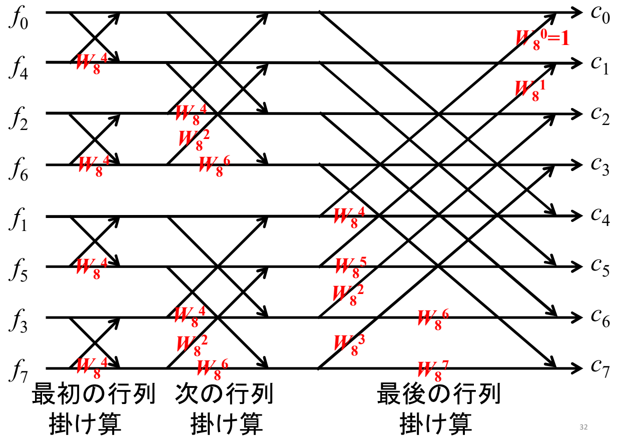
まとめると、

$$8\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_8^7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_8^6 \end{pmatrix} \times$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_0\\ f_4\\ f_2\\ f_6\\ f_1\\ f_5\\ f_3\\ f_7 \end{pmatrix}, (12.16)
$$

となる。この行列計算を図示すると、次のバタフライ演算図になる。

バタフライ演算図:



最終的に、高速フーリエ変換によって、(複素数の)掛け算が、8×8=64回から17回まで減少する。一般にN個のサンプリング数の場合には、計算量はN^2から$N\log_2 N$程度に減少する。

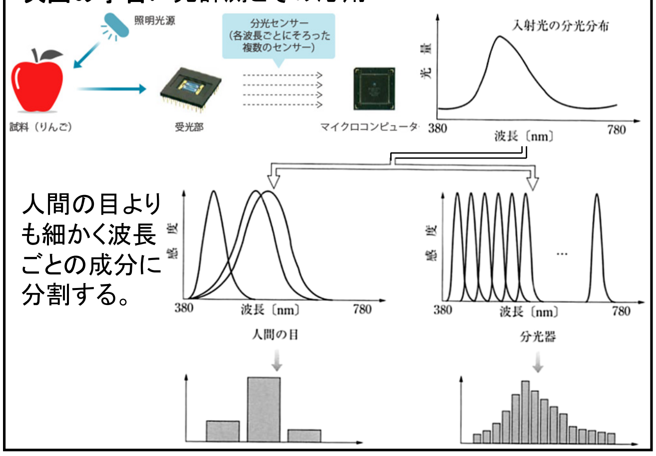
$$
8\begin{pmatrix} c_0\\ c_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & W_8^{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0+f_4+f_2+f_6\\ f_1+f_5+f_3+f_7 \end{pmatrix},
$$

$$
8\begin{pmatrix} c_2\\ c_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & W_8^{2}\\ 1 & W_8^{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0+f_4+W_8^{4}(f_2+f_6)\\ f_1+f_5+W_8^{4}(f_3+f_7) \end{pmatrix},
$$

$$
8\begin{pmatrix} c_1\\ c_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & W_8^{1}\\ 1 & W_8^{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0+W_8^{4}f_4+W_8^{2}(f_2+W_8^{4}f_6)\\ f_1+W_8^{4}f_5+W_8^{2}(f_3+W_8^{4}f_7) \end{pmatrix},
$$

$$
8\begin{pmatrix} c_3\\ c_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & W_8^{3}\\ 1 & W_8^{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0+W_8^{4}f_4+W_8^{6}(f_2+W_8^{4}f_6)\\ f_1+W_8^{4}f_5+W_8^{6}(f_3+W_8^{4}f_7) \end{pmatrix},
$$

次回の予告: 光計測とその応用



(付録1) ディラック(Dirac)のデルタ関数の性質

ディラックのデルタ関数は、クロネッカーのデルタを連続変数に拡張したものと言える。

$$
\delta(t)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}\infty, & (t=0)\\ 0, & (t\neq 0)\end{cases}, \quad (12.F1)
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1, \quad (12.F2)
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0), \quad (12.F3)
$$

(付録2) **複素フーリエ級数展開の式**:

$$
f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t}+c_{-n}e^{-in\omega t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}, \qquad (12.F4)
$$

複素フーリエ級数展開の展開係数c_nは、

$$
c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-in\omega t}dt, \qquad (12.F5) \qquad \left(\text{振動数}\,\omega\equiv\frac{2\pi}{T}\right)
$$

(nは$-\infty$から∞までの整数)